

第1章 | 関数



1 分数関数

まとめ

1 分数関数

x の分数式で表される関数を、 x の 分数関数 という。

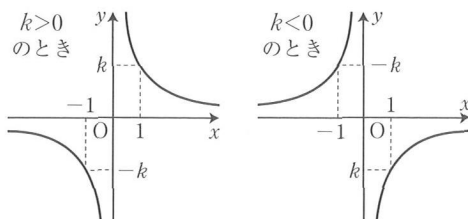
$$\leftarrow y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

定義域は、分母を 0 にする x の値を除く実数 x 全体である。

2 分数関数 $y = \frac{k}{x}$

分数関数 $y = \frac{k}{x}$ (k は 0 でない定数) の定義域は $x \neq 0$ 、値域は $y \neq 0$ で、そのグラフは図のようになる。 x 軸と y 軸が漸近線である。

注意 「0 を除く実数 x 全体」を「 $x \neq 0$ 」と表している。



補足 上のグラフは原点 O に関して対称であり、 x 軸、 y 軸は漸近線である。
このように直交する 2 つの漸近線をもつ双曲線を 直角双曲線 という。

3 分数関数 $y = \frac{k}{x-p} + q$

① グラフは、 $y = \frac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動した曲線で、漸近線は 2 直線 $x = p$ 、 $y = q$ である。

② 定義域は $x \neq p$ 、値域は $y \neq q$ である。

注意 一般に、関数 $y = f(x-p) + q$ のグラフは、関数 $y = f(x)$ のグラフを、 x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動したものである。

4 分数関数 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

$c \neq 0$ のとき、分数関数 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ は $y = \frac{k}{x-p} + q$ の形に変形できる。

A 分数関数とそのグラフ

教 p.8

練習
1

次の関数のグラフをかけ。

(1) $y = \frac{1}{x}$

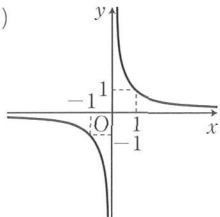
(2) $y = \frac{2}{x}$

(3) $y = -\frac{3}{x}$

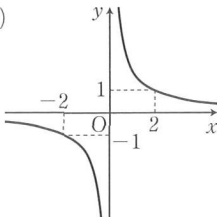
1
章
関
数

指針 分数関数 $y = \frac{k}{x}$ のグラフ グラフには代表的な点をいくつか記入しておく。

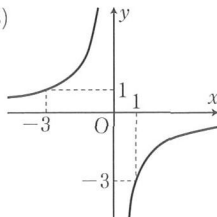
解答 (1)



(2)



(3)



教 p.9

練習
2

次の関数のグラフをかけ。また、その定義域、値域を求めよ。

(1) $y = -\frac{2}{x} + 1$

(2) $y = \frac{1}{x-2} - 1$

(3) $y = \frac{2}{x+1} - 3$

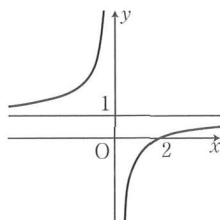
指針 分数関数 $y = \frac{k}{x-p} + q$ のグラフ $y = \frac{k}{x-p} + q$ と与えられた関数を比べ、符号に注意して、 k , p , q の値を確認する。まず 2 本の漸近線 $x=p$, $y=q$ をかき、平行移動した直角双曲線をかく。

解答 (1) $y = -\frac{2}{x}$ のグラフを、 y 軸方向に 1

だけ平行移動したもので、図のようになる。

漸近線は 2 直線 $x=0$ (y 軸), $y=1$

定義域は $x \neq 0$, 値域は $y \neq 1$ 答

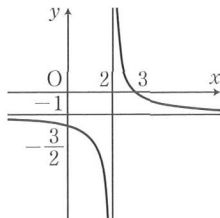


(2) $y = \frac{1}{x}$ のグラフを、 x 軸方向に 2,

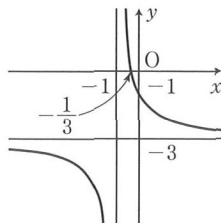
y 軸方向に -1 だけ平行移動したもので、図のようになる。

漸近線は 2 直線 $x=2$, $y=-1$

定義域は $x \neq 2$, 値域は $y \neq -1$ 答



- (3) $y = \frac{2}{x}$ のグラフを, x 軸方向に -1 ,
 y 軸方向に -3 だけ平行移動したもので,
 図ようになる。
 漸近線は 2 直線 $x = -1, y = -3$
 定義域は $x \neq -1$, 値域は $y \neq -3$ 答



B 分数関数 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ のグラフ

練習
3

次の関数のグラフをかけ。また, その定義域, 値域を求めよ。

- (1) $y = \frac{x-1}{x-2}$ (2) $y = \frac{-2x+5}{x-1}$ (3) $y = \frac{4x+3}{2x+1}$

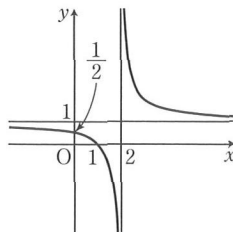
指針 分数関数 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ のグラフ 関数の式を $y = \frac{k}{x-p} + q$ の形に変形する。この形にすれば, 定義域は $x \neq p$, 値域は $y \neq q$ と判断できる。

- 解答 (1) $\frac{x-1}{x-2} = \frac{(x-2)+1}{x-2}$ であるから $y = \frac{1}{x-2} + 1$

よって, グラフは右の図のようになる。

漸近線は 2 直線 $x = 2, y = 1$

定義域は $x \neq 2$, 値域は $y \neq 1$ 答



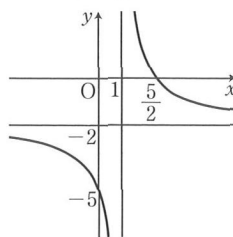
- (2) $\frac{-2x+5}{x-1} = \frac{-2(x-1)+3}{x-1}$ であるから

$$y = \frac{3}{x-1} - 2$$

よって, グラフは右の図のようになる。

漸近線は 2 直線 $x = 1, y = -2$

定義域は $x \neq 1$, 値域は $y \neq -2$ 答



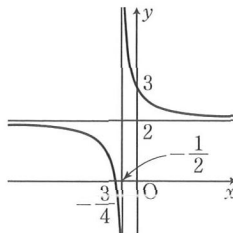
- (3) $\frac{4x+3}{2x+1} = \frac{2(2x+1)+1}{2x+1} = \frac{1}{2x+1} + 2$ であるから

$$y = \frac{\frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}} + 2$$

よって, グラフは右の図のようになる。

漸近線は 2 直線 $x = -\frac{1}{2}, y = 2$

定義域は $x \neq -\frac{1}{2}$, 値域は $y \neq 2$ 答



C 分数関数の応用

教 p.11

練習

4

関数 $y = \frac{3}{x+1}$ のグラフと次の直線の共有点の座標を求めよ。

- (1) $y = x - 1$ (2) $y = \frac{1}{2}x$ (3) $y = -3$

指針 分数関数のグラフと直線の共有点 他の関数の場合と同様、共有点の座標は、2つの式を連立方程式として解いたときの実数解の組として得られる。式の形から、 y を消去して分母を払うことから始める。

解答 (1) $y = \frac{3}{x+1}$ …… ①

$$y = x - 1 \quad \text{…… ②}$$

①, ② から y を消去すると,

$$\frac{3}{x+1} = x - 1 \text{ より}$$

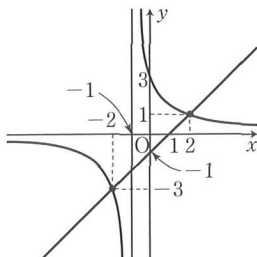
$$3 = (x-1)(x+1)$$

$$\text{すなわち} \quad x^2 - 4 = 0$$

$$\text{これを解いて} \quad x = \pm 2$$

② より, $x = 2$ のとき $y = 1$, $x = -2$ のとき $y = -3$

よって, 共有点の座標は $(2, 1)$, $(-2, -3)$ 答



(2) $y = \frac{3}{x+1}$ …… ①

$$y = \frac{1}{2}x \quad \text{…… ②}$$

①, ② から y を消去すると,

$$\frac{3}{x+1} = \frac{1}{2}x \text{ より}$$

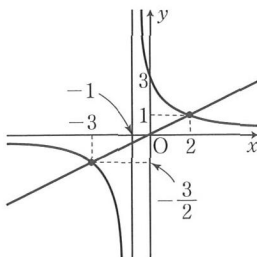
$$6 = x(x+1)$$

$$\text{すなわち} \quad x^2 + x - 6 = 0$$

$$\text{これを解いて} \quad x = 2, -3$$

② より, $x = 2$ のとき $y = 1$, $x = -3$ のとき $y = -\frac{3}{2}$

よって, 共有点の座標は $(2, 1)$, $(-3, -\frac{3}{2})$ 答



$$\leftarrow (x-2)(x+3) = 0$$

$$(3) \quad y = \frac{3}{x+1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$y = -3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ② から y を消去すると,

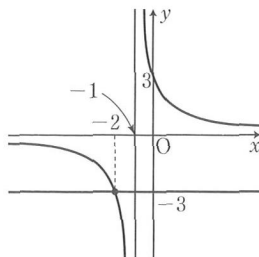
$$\frac{3}{x+1} = -3 \text{ より } 3 = -3(x+1)$$

$$\text{すなわち} \quad 3x = -6$$

$$\text{これを解いて} \quad x = -2$$

② より, $y = -3$ であるから,

共有点の座標は $(-2, -3)$ 答



練習
5

次の方程式, 不等式を解け。

$$(1) \quad \frac{2}{x+2} = x+3$$

$$(2) \quad \frac{2}{x+2} \leq x+3$$

教 p.11

指針 分数式を含む方程式, 不等式

(1) 分母を払って, その2次方程式を解く。

(2) (1)の解を利用して, $y = \frac{2}{x+2}$ のグラフと $y = x+3$ のグラフの上下関係に

注目して解く。一般に, 不等式 $f(x) \leq g(x)$ の解は, $y = f(x)$ のグラフが $y = g(x)$ のグラフより下側 (共有点を含む) にある x の値の範囲である。

解答 (1) $\frac{2}{x+2} = x+3$ より $2 = (x+3)(x+2)$

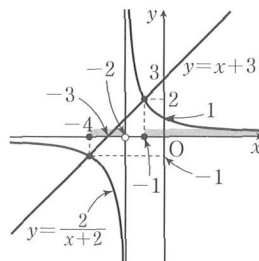
$$\text{すなわち} \quad x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$\text{これを解くと} \quad x = -4, -1 \quad \text{答}$$

(2) 求める不等式の解は, 関数 $y = \frac{2}{x+2}$ のグ

ラフが直線 $y = x+3$ より下側 (共有点を含む) にある x の値の範囲である。(1)より, 共有点の x 座標は $-4, -1$ であり, 共有点の座標は $(-4, -1), (-1, 2)$ となるので右図のようになる。この図から, 求める解は

$$-4 \leq x < -2, -1 \leq x \quad \text{答}$$



2 無理関数

1 章
関数

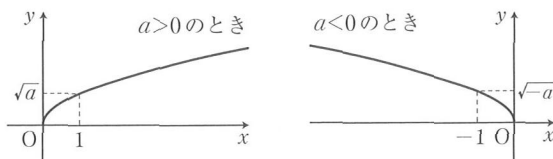
まとめ

1 無理関数

根号 $\sqrt{\quad}$ の中に文字を含む式を 無理式 といい, x についての無理式で表された関数を, x の 無理関数 という。とくに断りがない場合, その定義域は, 根号の中が 0 以上となる実数 x 全体である。

2 無理関数のグラフ

一般に, 無理関数 $y = \sqrt{ax}$ のグラフは, 次のようになる。



$a > 0$ のとき, 定義域は $x \geq 0$, 値域は $y \geq 0$ で, 増加関数である。

$a < 0$ のとき, 定義域は $x \leq 0$, 値域は $y \geq 0$ で, 減少関数である。

3 無理関数 $y = \sqrt{a(x-p)}$

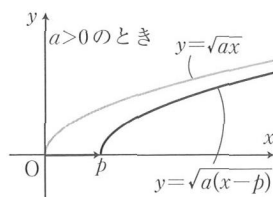
① グラフは, $y = \sqrt{ax}$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動した曲線である。

② $a > 0$ のとき

定義域は $x \geq p$, 値域は $y \geq 0$

$a < 0$ のとき

定義域は $x \leq p$, 値域は $y \geq 0$



補足 定義域は, $a(x-p) \geq 0$ を満たす実数 x 全体である。

A 無理関数とそのグラフ

教 p.13

練習
6

次の関数のグラフをかけ。また, その定義域, 値域を求めよ。

(1) $y = \sqrt{2x}$

(2) $y = -\sqrt{2x}$

(3) $y = \sqrt{-2x}$

指針 無理関数 $y = \sqrt{ax}$ のグラフ

(1) 点 $(0, 0)$, $(1, \sqrt{2})$, $(2, 2)$, ……をとって滑らかな曲線で結ぶ。

(2) は (1) と x 軸に関して対称, (3) は (1) と y 軸に関して対称である。この対称性を利用するとよい。

解答 (1) グラフは図のようになる。

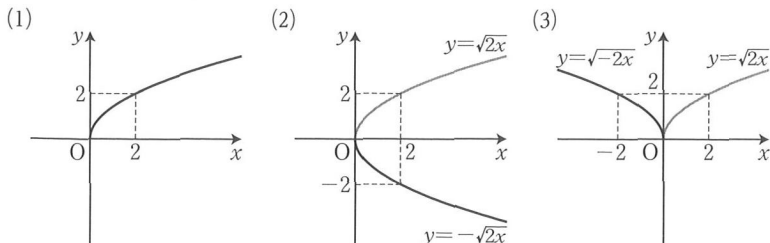
定義域は $x \geq 0$, 値域は $y \geq 0$ 図

(2) グラフは図のようになる。

定義域は $x \geq 0$, 値域は $y \leq 0$ 答

(3) グラフは図のようになる。

定義域は $x \leq 0$, 値域は $y \geq 0$ 答



深める

教 p.13

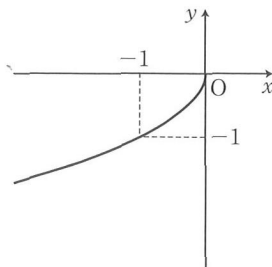
関数 $y = -\sqrt{-x}$ のグラフをかいてみよう。関数 $y = \sqrt{x}$ のグラフとの位置関係はどのようになるだろうか。

指針 無理関数 $y = -\sqrt{ax}$ のグラフ 関数 $y = -\sqrt{ax}$ のグラフは, x 軸より下側(原点を含む)にあり, $y = \sqrt{ax}$ のグラフと x 軸に関して対称である。

解答 $y = -\sqrt{-x}$ のグラフは, 右の図のようになる。

また, 点 (x, y) が関数 $y = \sqrt{x}$ のグラフ上にあるとき, 点 $(-x, -y)$ は関数 $y = -\sqrt{-x}$ のグラフ上にある。

点 (x, y) と点 $(-x, -y)$ は原点に関して対称であるから, 関数 $y = -\sqrt{-x}$ のグラフは, 関数 $y = \sqrt{x}$ のグラフと 原点に関して対称な位置にある。 答



練習
7

教 p.14

次の関数のグラフをかけ。また, その定義域, 値域を求めよ。

(1) $y = \sqrt{x-1}$ (2) $y = \sqrt{-2x+4}$ (3) $y = -\sqrt{3x+3}$

指針 無理関数 $y = \sqrt{ax+b}$ のグラフ

(2), (3) は $y = \sqrt{a(x-p)}$ や $y = -\sqrt{a(x-p)}$ の形に変形し, $y = \sqrt{ax}$ や $y = -\sqrt{ax}$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動する。

定義域は, 根号の中が 0 以上となる実数 x 全体である。

解答 (1) $y = \sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したもので, 図のようになる。

定義域は $x \geq 1$, 値域は $y \geq 0$ 答

$$\leftarrow x-1 \geq 0$$

(2) 変形すると $y = \sqrt{-2(x-2)}$

$y = \sqrt{-2x}$ のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したもので, 図のように

なる。

定義域は $x \leq 2$, 値域は $y \geq 0$ 答

$$\leftarrow -2(x-2) \geq 0$$

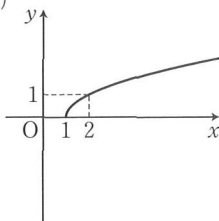
(3) 変形すると $y = -\sqrt{3(x+1)}$

$y = -\sqrt{3x}$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したもので、図のようになる。

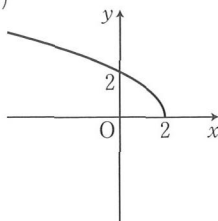
定義域は $x \geq -1$, 値域は $y \leq 0$ 答

$$\leftarrow 3(x+1) \geq 0$$

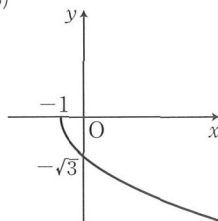
(1)



(2)



(3)



B 無理関数の応用

教 p.15

練習
8

次の2つの関数について、グラフの共有点の座標を求めよ。

(1) $y = \sqrt{2x+2}$, $y = x-3$

(2) $y = -\sqrt{x+1}$, $y = x-1$

指針 無理関数のグラフと直線の共有点 ここでも共有点の座標は、2つの式を連立方程式として解いたときの実数解の組として得られる。

(1) y を消去すると $\sqrt{2x+2} = x-3$ …… ①

両辺を2乗すると $2x+2 = (x-3)^2$

ただし、この方程式の解のすべてがもとの方程式①の解とは限らない。得られた x の値が①を満たすかどうか調べて、解を決定する。

グラフを利用して視覚的にとらえることにより誤りを防ぐ。

解答 (1) $y = \sqrt{2x+2}$ …… ①

$y = x-3$ …… ②

①, ② から y を消去すると

$\sqrt{2x+2} = x-3$ …… ③

両辺を2乗して $2x+2 = (x-3)^2$

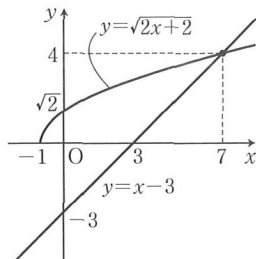
整理すると $x^2 - 8x + 7 = 0$

これを解いて $x = 1, 7$

このうち、③を満たすのは $x=7$ で、このとき

③の両辺の値は4である。

よって、共有点の座標は $(7, 4)$ 答



$$(2) \quad y = -\sqrt{x+1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$y = x - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ② から y を消去すると

$$-\sqrt{x+1} = x - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

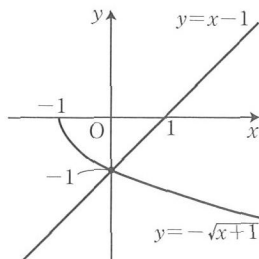
$$\text{両辺を2乗して} \quad x+1 = (x-1)^2$$

$$\text{整理すると} \quad x^2 - 3x = 0$$

$$\text{これを解いて} \quad x = 0, 3$$

このうち, ③ を満たすのは $x=0$ で, このとき ③ の両辺の値は -1 である。

よって, 共有点の座標は $(0, -1)$ 答



注意 (1) $x=1$ は関数 $y = -\sqrt{2x+2}$ のグラフと直線 $y = x - 3$ の共有点の x 座標であり, 方程式 $-\sqrt{2x+2} = x - 3$ の解である。

参考 一般に, 「 $\sqrt{A} = B \implies A = B^2$ 」は正しいが,

「 $A = B^2 \implies \sqrt{A} = B$ 」は正しくない。

$A = B^2$ から導かれるのは, $\sqrt{A} = B$ または $-\sqrt{A} = B$ である。

同値な変形は「 $\sqrt{A} = B \iff B \geq 0 \text{ かつ } A = B^2$ 」となる。

練習 9

教 p.15

次の方程式, 不等式を解け。

$$(1) \quad \sqrt{x-1} = -x+3$$

$$(2) \quad \sqrt{x-1} \leq -x+3$$

指針 無理式を含む方程式, 不等式

(1) 練習8と同様に, 方程式 $\sqrt{x-1} = -x+3 \cdots \cdots \textcircled{A}$ を解いて, ① を満たすものを解とする。

(2) (1) の解を利用して, グラフの上下関係に注目して解く。

解答 (1) $\sqrt{x-1} = -x+3 \cdots \cdots \textcircled{1}$

両辺を2乗して整理すると

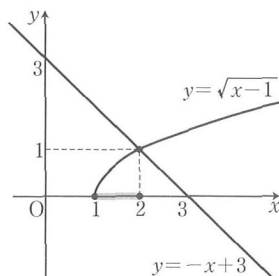
$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$\text{これを解くと} \quad x = 2, 5$$

このうち, ① を満たすのは $x = 2$ 答

(2) 求める不等式の解は, 関数 $y = \sqrt{x-1}$ のグラフが直線 $y = -x+3$ より下側 (共有点を含む) にある x の値の範囲である。

(1) より, 共有点の x 座標は 2 で, 共有点の座標は $(2, 1)$ であるから, 図のようになる。この図から, 求める解は $1 \leq x \leq 2$ 答



参考 無理式を含む不等式と同値関係は次のようになる。

$$\sqrt{A} < B \iff A \geq 0 \text{ かつ } B > 0 \text{ かつ } A < B^2$$

$$\sqrt{A} > B \iff B < 0 \text{ かつ } A \geq 0 \text{ または } B \geq 0 \text{ かつ } A > B^2$$

3 逆関数と合成関数

まとめ

1 逆関数

一般に、関数 $y=f(x)$ が増加関数または減少関数のとき、値域内の y の値を定めると、それに対応して x の値がただ 1 つ定まる。すなわち、 x は y の関数である。この関数を $x=g(y)$ とする。

このとき、変数 y を x に書き直した関数 $g(x)$ を、もとの関数 $f(x)$ の 逆関数といい、 $f^{-1}(x)$ で表す。

関数とその逆関数では、定義域と値域が入れかわる。

2 $f(x)$ の逆関数 $g(x)$ の求め方

① $y=f(x)$ を x について解き、 $x=g(y)$ の形にする。

② x と y を入れかえて、 $y=g(x)$ とする。

逆関数 $g(x)$ の定義域は、もとの関数 $f(x)$ の値域と同じ。

3 逆関数の性質

関数 $f(x)$ が逆関数 $f^{-1}(x)$ をもつとき

$$b=f(a) \iff a=f^{-1}(b)$$

4 逆関数とグラフ

関数 $y=f(x)$ のグラフとその逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフは、直線 $y=x$ に関して対称である。

5 合成関数

2 つの関数 $f(x)$ 、 $g(x)$ について、 $f(x)$ の値域が $g(x)$ の定義域に含まれているとき、新しい関数 $g(f(x))$ が考えられる。この関数を、 $f(x)$ と $g(x)$ の 合成関数 という。 $g(f(x))$ を $(g \circ f)(x)$ と書く。

注意 一般に、 $(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ は同じ関数ではない。

また、関数 $f(x)$ の逆関数が $g(x)$ であるとき、 $(f \circ g)(x)$ 、 $(g \circ f)(x)$ はそれぞれの定義域において $(f \circ g)(x)=x$ 、 $(g \circ f)(x)=x$ となる。

A 逆関数

教 p.17

練習
10

次の関数の逆関数を求めよ。

(1) $y=3x-1 \quad (0 \leq x \leq 2)$

(2) $y=-\sqrt{x}$

(3) $y=3^x$

(4) $y=\log_4 x$

指針 逆関数の求め方 まず、もとの関数の値域 (求める逆関数の定義域となる) を確認してから、まとめの 2 の手順に従う。

(3)、(4) 一般に、 $a>0$ かつ $a \neq 1$ のとき、実数 x と正の数 y について

$$y=a^x \iff x=\log_a y$$

したがって、指数関数 $y=a^x$ と対数関数 $y=\log_a x$ は、互いに他の逆関数である。

解答 (1) 関数 $y=3x-1$ は増加関数であり、

$$x=0 \text{ のとき } y=-1$$

$$x=2 \text{ のとき } y=5$$

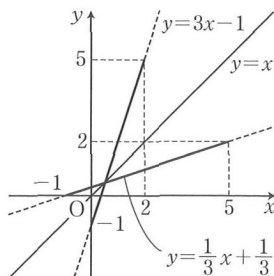
であるから、値域は $-1 \leq y \leq 5$

$y=3x-1$ を x について解くと

$$x = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} \quad (-1 \leq y \leq 5)$$

よって、求める逆関数は、 x と y を入れかえて

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \quad (-1 \leq x \leq 5) \quad \text{答}$$



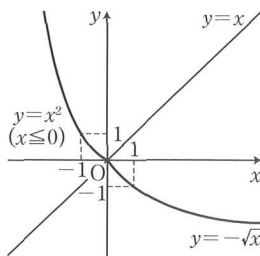
(2) 関数 $y=-\sqrt{x}$ の値域は $y \leq 0$

$y=-\sqrt{x}$ を x について解くと

$$x=y^2 \quad (y \leq 0)$$

よって、求める逆関数は、 x と y を入れかえて

$$y=x^2 \quad (x \leq 0) \quad \text{答}$$



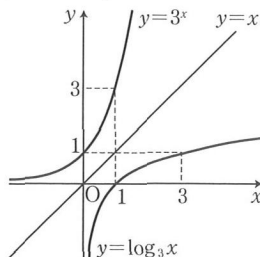
(3) 関数 $y=3^x$ の値域は $y > 0$

$y=3^x$ を x について解くと

$$x=\log_3 y \quad (y > 0)$$

よって、求める逆関数は、 x と y を入れかえて

$$y=\log_3 x \quad \text{答}$$



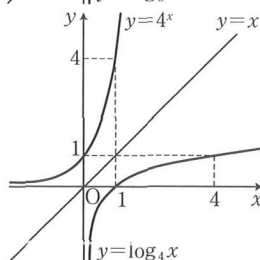
(4) 関数 $y=\log_4 x$ の値域は実数全体である。

$y=\log_4 x$ を x について解くと

$$x=4^y$$

よって、求める逆関数は、 x と y を入れかえて

$$y=4^x \quad \text{答}$$



注意 (3) 関数 $y=\log_a x$ については、定義域 $x > 0$ の表示は省略することが多い。

練習
11

次の関数の逆関数を求めよ。

(1) $y = \frac{2x+3}{x-1}$

(2) $y = \frac{-x+2}{x+3}$

指針 分数関数の逆関数 関数の式を $y = \frac{k}{x-p} + q$ の形に変形し、値域が $y \neq q$ であることを確認してから、 x について解く。

解答 (1) $\frac{2x+3}{x-1} = \frac{2(x-1)+5}{x-1} = \frac{5}{x-1} + 2$

であるから、関数 $y = \frac{2x+3}{x-1}$ の値域は $y \neq 2$

x について解くと、 $y(x-1) = 2x+3$ より

$$(y-2)x = y+3$$

$y \neq 2$ であるから

$$x = \frac{y+3}{y-2}$$

よって、求める逆関数は $y = \frac{x+3}{x-2}$ 答

(2) $\frac{-x+2}{x+3} = \frac{-(x+3)+5}{x+3} = \frac{5}{x+3} - 1$

であるから、関数 $y = \frac{-x+2}{x+3}$ の値域は $y \neq -1$

x について解くと、 $y(x+3) = -x+2$ より

$$(y+1)x = -3y+2$$

$y \neq -1$ であるから

$$x = \frac{-3y+2}{y+1}$$

よって、求める逆関数は $y = \frac{-3x+2}{x+1}$ 答

練習
12

次の関数の逆関数を求めよ。

(1) $y = x^2 + 2 \quad (x \geq 0)$

(2) $y = -x^2 \quad (x \leq 0)$

指針 2次関数の逆関数 関数の定義域を単調に増加または減少する区間に制限すれば、その関数は逆関数をもつ。

定義域の制約に注意して、関数の式を x について解く。

解答 (1) $y = x^2 + 2$ を x について解くと $x = \pm\sqrt{y-2}$

$x \geq 0$ であるから $x = \sqrt{y-2}$

よって、求める逆関数は $y = \sqrt{x-2}$ 答

(2) $y = -x^2$ を x について解くと $x = \pm\sqrt{-y}$

$x \leq 0$ であるから $x = -\sqrt{-y}$

よって、求める逆関数は $y = -\sqrt{-x}$ 答

B 逆関数の性質

教 p.19

練習
13

$a \neq 0$ とする。関数 $f(x) = ax + b$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について、
 $f(2) = 4$, $f^{-1}(1) = -4$ であるとき、定数 a , b の値を求めよ。

指針 逆関数の性質 逆関数の性質「 $b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$ 」を利用すると、逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めなくても解決する。

$f(2) = 4$ と、「 $f^{-1}(1) = -4 \iff f(-4) = 1$ 」から a , b についての連立方程式が得られる。

解答 $f(2) = 4$ より $2a + b = 4$ …… ①

$f^{-1}(1) = -4$ すなわち $f(-4) = 1$ より $-4a + b = 1$ …… ②

①, ② を解くと $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$ 答

教 p.19

練習
14

次の関数のグラフおよびその逆関数のグラフを同じ図中にかけ。

(1) $y = \sqrt{-x}$

(2) $y = \log \frac{1}{2} x$

指針 逆関数とグラフ もとの関数のグラフをかき、これと直線 $y = x$ に関して対称な曲線を作ると、それが、逆関数のグラフとなる。対称であることを示す代表的な何組かの点の座標を記入しておく。

ここでは、逆関数の式も書き添えておく。

解答 (1) 値域は $y \geq 0$ であり、 $y = \sqrt{-x}$ を x について解くと $x = -y^2$

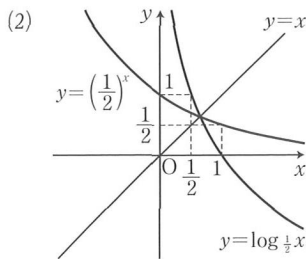
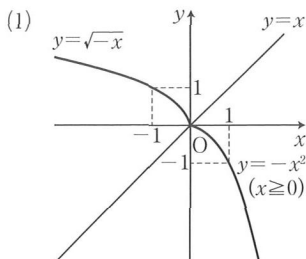
よって、逆関数は $y = -x^2$ ($x \geq 0$)

グラフは図のようになる。

(2) $y = \log \frac{1}{2} x$ を x について解くと $x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$

よって、逆関数は $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

グラフは図のようになる。



C 合成関数

教 p.20

練習
15

$f(x)=x^2$, $g(x)=\log_2(x+1)$, $h(x)=2^x-1$ について、次の合成関数を求めよ。

- (1) $(g \circ f)(x)$ (2) $(f \circ g)(x)$ (3) $(g \circ h)(x)$

指針 合成関数 $(g \circ f)(x)$ は合成関数 $g(f(x))$ を表している。 $g(x)$ の x に $f(x)$ を代入して得られる。

解答 (1) $f(x) \geq 0$ であるから、 $f(x)$ の値域は $g(x)$ の定義域 $x > -1$ に含まれる。

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \log_2(x^2 + 1) \quad \text{答}$$

(2) $g(x)$ の値域と $f(x)$ の定義域はともに実数全体で一致する。

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\log_2(x+1)) = \{\log_2(x+1)\}^2 \quad \text{答}$$

(3) $h(x) > -1$ であるから、 $h(x)$ の値域は $g(x)$ の定義域 $x > -1$ と一致する。

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(2^x - 1) = \log_2 2^x = x \quad \text{答}$$

参考 (3)の結果から、関数 $g(x)$ と $h(x)$ は互いに他の逆関数であることがわかる。

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ は、 g と f の
順番が同じと覚えよう。



第1章

問題

教 p.21

1 次の関数のグラフをかけ。また、その定義域、値域を求めよ。

(1) $y = \frac{2x-3}{x-1}$

(2) $y = \frac{4x}{2x-1}$

指針 分数関数 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ のグラフ まず関数の式を $y = \frac{k}{x-p} + q$ の形に変形し、もとになるグラフをどのように平行移動したものであるかを調べる。

解答 (1) $\frac{2x-3}{x-1} = \frac{2(x-1)-1}{x-1} = -\frac{1}{x-1} + 2$

よって $y = -\frac{1}{x-1} + 2$

グラフは $y = -\frac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に 1、 y 軸方向に 2 だけ平行移動したもので、図のようになる。

漸近線は 2 直線 $x=1$, $y=2$

定義域は $x \neq 1$, 値域は $y \neq 2$ 答

$$(2) \frac{4x}{2x-1} = \frac{2(2x-1)+2}{2x-1} = \frac{2}{2x-1} + 2$$

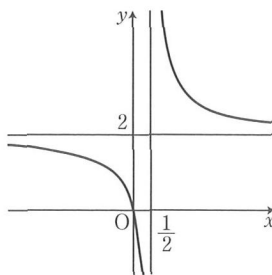
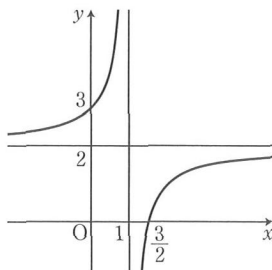
$$= \frac{1}{x-\frac{1}{2}} + 2$$

よって $y = \frac{1}{x-\frac{1}{2}} + 2$

グラフは $y = \frac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に $\frac{1}{2}$ 、 y 軸方向に 2 だけ平行移動したもので、図のようになる。

漸近線は 2 直線 $x = \frac{1}{2}$, $y=2$

定義域は $x \neq \frac{1}{2}$, 値域は $y \neq 2$ 答



教 p.21

2 次の関数のグラフをかけ。また、その定義域、値域を求めよ。

(1) $y = \sqrt{2-x}$

(2) $y = -\sqrt{2x+1}$

指針 無理関数 $y = \sqrt{ax+b}$ のグラフ $y = \sqrt{a(x-p)}$ の形に変形し、 $y = \sqrt{ax}$ のグラ

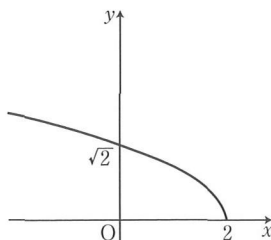
フを x 軸方向に p だけ平行移動する。定義域は、根号の中が 0 以上となる実数 x 全体である。なお、 $y = -\sqrt{ax+b}$ のグラフは、 $y = \sqrt{ax+b}$ のグラフと x 軸に関して対称である。

解答 (1) 変形すると

$$y = \sqrt{-(x-2)}$$

グラフは、 $y = \sqrt{-x}$ のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したもので、図のようになる。

定義域は $x \leq 2$ ，値域は $y \geq 0$ 答

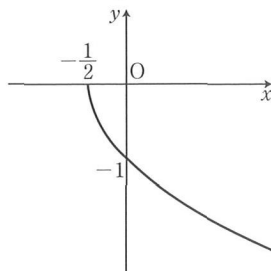


(2) 変形すると

$$y = -\sqrt{2\left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

グラフは、 $y = -\sqrt{2x}$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{1}{2}$ だけ平行移動したもので、図のようになる。

定義域は $x \geq -\frac{1}{2}$ ，値域は $y \leq 0$ 答



グラフをかかなくても、 $\sqrt{\quad}$ が 0 以上となることから値域を求められるね。



教 p.21

3 次の方程式，不等式を解け。

(1) $\frac{2x-4}{x-1} = x-2$

(2) $\frac{2x-4}{x-1} \leq x-2$

(3) $\sqrt{x-1} = 7-x$

(4) $\sqrt{x-1} \leq 7-x$

指針 分数式，無理式を含む方程式，不等式

(1) 分母を払って得られる 2 次方程式を解く。

(3) 両辺を 2 乗して得られる 2 次方程式を解く。ただし、2 乗して得られた方程式のすべての解がもとの方程式の解とは限らない。得られた x の値がもとの方程式を満たすかどうかを調べる。

(2), (4) 左辺，右辺それぞれの関数のグラフをかき，共有点の x 座標とグラフの上下関係から，不等式を満たす x の値の範囲を求める。なお，共有点の x 座標は，それぞれ(1), (3)で求めた方程式の解である。

解答 (1) $\frac{2x-4}{x-1}=x-2$ より

$$2(x-2)=(x-2)(x-1)$$

整理すると $(x-2)(x-3)=0$

これを解くと $x=2, 3$ 答

(2) $\frac{2x-4}{x-1}=\frac{2(x-1)-2}{x-1}$ であるから

$$y=-\frac{2}{x-1}+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad y=x-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

とおく。

不等式の解は、関数①のグラフが直線②より下側(共有点を含む)にある x の値の範囲である。

グラフの共有点の座標は、(1)の結果と②から

$$(2, 0), (3, 1)$$

よって、①と②のグラフは右図のようになるから、求める解は

$$1 < x \leq 2, 3 \leq x \quad \text{答}$$

(3) $\sqrt{x-1}=7-x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

の両辺を2乗すると $x-1=(7-x)^2$

整理すると $x^2-15x+50=0$

これを解くと $x=5, 10$

このうち、①を満たすのは $x=5$ 答

(4) $y=\sqrt{x-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$$y=7-x \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

とおく。

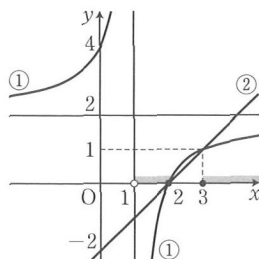
不等式の解は、関数①のグラフが直線②より下側(共有点を含む)にある x の値の範囲である。

グラフの共有点の座標は、(3)の結果と②から

$$(5, 2)$$

よって、①と②のグラフは右図のようになるから、求める解は

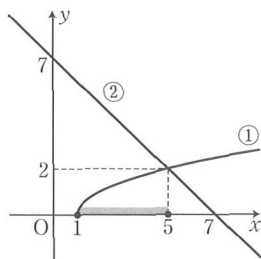
$$1 \leq x \leq 5 \quad \text{答}$$



$\sqrt{x-1}=7-x$ より、左辺は0以上だから、右辺も0以上で、 $x \leq 7$ の範囲に解があるよ。



$$\leftarrow (x-5)(x-10)=0$$



参考 (2) $\frac{2x-4}{x-1} \leq x-2 \iff \begin{cases} x > 1 \text{ のとき } 2x-4 \leq (x-2)(x-1) \\ x < 1 \text{ のとき } 2x-4 \geq (x-2)(x-1) \end{cases}$

(4) $\sqrt{x-1} \leq 7-x \iff [x-1 \geq 0 \text{ かつ } 7-x \geq 0 \text{ かつ } x-1 \leq (7-x)^2]$

4 次の関数のグラフ上に点 $(2, -a)$ があるように、定数 a の値を定めよ。

$$(1) y = \frac{3x-a}{x-a}$$

$$(2) y = \sqrt{3x-a}$$

指針 点がグラフ上にあるための条件 点 $(2, -a)$ がグラフ上にあるから、 $x=2$, $y=-a$ のとき関数の式は成り立つ。(1), (2) のそれぞれの式に代入し、 a についての方程式を導く。

解答 (1) グラフ上に点 $(2, -a)$ があるから

$$-a = \frac{6-a}{2-a} \quad \text{すなわち} \quad a^2 - a - 6 = 0 \quad \leftarrow (a+2)(a-3) = 0$$

これを解くと $a = -2, 3$ 答

(2) グラフ上に点 $(2, -a)$ があるから $-a = \sqrt{6-a}$ …… ①

$$\text{両辺を2乗して整理すると} \quad a^2 + a - 6 = 0 \quad \leftarrow (a-2)(a+3) = 0$$

これを解くと $a = 2, -3$

このうち、①を満たすのは $a = -3$ 答

注意 (2) ① $\iff -a \geq 0$ かつ $(-a)^2 = 6-a$

5 次の関数の逆関数を求めよ。

$$(1) y = \frac{x}{x-1} \quad (x > 1)$$

$$(2) y = \sqrt{1-x}$$

指針 分数関数、無理関数の逆関数 $f(x)$ の逆関数 $g(x)$ の求め方

1 $y=f(x)$ を x について解き、 $x=g(y)$ の形にする。

2 x と y を入れかえて、 $y=g(x)$ とする。

逆関数の定義域は、もとの関数の値域と同じ。

$$\text{解答 (1)} \quad \frac{x}{x-1} = \frac{(x-1)+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 1$$

であるから、関数 $y = \frac{x}{x-1} \quad (x > 1)$ の値域は $y > 1$

x について解くと、 $y(x-1) = x$ より

$$(y-1)x = y$$

$$y \neq 1 \text{ であるから} \quad x = \frac{y}{y-1} \quad (y > 1)$$

よって、求める逆関数は

$$y = \frac{x}{x-1} \quad (x > 1) \quad \text{答}$$

(2) 関数 $y = \sqrt{1-x}$ の値域は $y \geq 0$

x について解くと、 $y^2 = 1-x$ より

もとの関数の値域は、
グラフを考えて求めよう。



$$x=1-y^2 \quad (y \geq 0)$$

よって、求める逆関数は

$$y=1-x^2 \quad (x \geq 0) \quad \text{答}$$

教 p.21

6 関数 $f(x)=4^x$, $g(x)=\log_2 x$ について、次の合成関数を求めよ。

$$(1) (g \circ f)(x)$$

$$(2) (f \circ g)(x)$$

指針 合成関数 $f(x)$ の値域が $g(x)$ の定義域に含まれるとき、 $(g \circ f)(x)$ が考えられる。

解答 (1) $f(x) > 0$ であるから、 $f(x)$ の値域は $g(x)$ の定義域 $x > 0$ と一致する。

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(4^x)$$

$$= \log_2 4^x = \log_2 2^{2x} = 2x \quad \text{答}$$

(2) $g(x)$ の値域と $f(x)$ の定義域はともに実数全体で一致する。また、 $g(x)$ の定義域が $x > 0$ であることに注意して

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\log_2 x)$$

$$= 4^{\log_2 x} = 2^{2 \log_2 x} = 2^{\log_2 x^2} = x^2 \quad (x > 0) \quad \text{答}$$

補足 (2) $a^{\log_a b}$ において、 $a^{\log_a b} = X$ とおけば、対数の定義より、 $\log_a X = \log_a b$ であるから、 $X = b$ すなわち $a^{\log_a b} = b$ となる。

教 p.21

7 関数 $y=3^x$ が、逆関数をもてばそれを求め、逆関数をもたなければその理由を説明せよ。

指針 逆関数 関数 $y=f(x)$ が逆関数をもつのは、値域内の y の値を定めると、それに対応して x の値がただ1つ定まるときである。

解答 逆関数をもたない

(理由) $y=3$ に対応する x の値は無数に存在し、1つには定まらないから。

終

第1章 章末問題A

1章

関数

教 p.22

1. 関数 $y = \frac{3x+4}{x+2}$ のグラフは、関数 $y = \frac{x+3}{x+5}$ のグラフを、どのように平行移動したものか。

指針 分数関数のグラフの平行移動 まず、 $y = \frac{k}{x-p} + q$ の形に変形して、それぞれの漸近線を求める。これらの漸近線の位置関係を利用して、どのように平行移動したのかを考える。

解答 $\frac{3x+4}{x+2} = \frac{3(x+2)-2}{x+2} = -\frac{2}{x+2} + 3$ であるから、

関数 $y = \frac{3x+4}{x+2}$ …… ① のグラフの漸近線は 2 直線 $x = -2$, $y = 3$

$\frac{x+3}{x+5} = \frac{(x+5)-2}{x+5} = -\frac{2}{x+5} + 1$ であるから、関数 $y = \frac{x+3}{x+5}$ …… ② のグラフの漸近線は 2 直線 $x = -5$, $y = 1$

関数 ② のグラフの 2 本の漸近線を、 x 軸方向に $-2 - (-5) = 3$, y 軸方向に $3 - 1 = 2$ だけ平行移動すると、関数 ① のグラフの 2 本の漸近線に重なる。

よって、関数 ① のグラフは、関数 ② のグラフを、 x 軸方向に 3, y 軸方向に 2 だけ平行移動したものである。 答

2本の漸近線がそれぞれどれだけ平行移動したかを考えよう。



教 p.22

2. 次の関数のグラフをかけ。また、その値域を求めよ。

(1) $y = \frac{3+x}{3-x}$ ($0 \leq x \leq 2$)

(2) $y = -\sqrt{2x+6}$ ($-1 \leq x \leq 5$)

指針 分数関数・無理関数のグラフ $y = \frac{k}{x-p} + q$, $y = -\sqrt{a(x-p)}$ の形に変形し、それぞれもともになるグラフをどのように平行移動したものであるかを調べ、グラフの概形をつかむ。

定義域に制限があるから、値域に注意する。

解答 (1) $\frac{3+x}{3-x} = -\frac{x+3}{x-3} = -\frac{(x-3)+6}{x-3}$

であるから $y = -\frac{6}{x-3} - 1$

これは $y = -\frac{6}{x}$ のグラフを x 軸方向に 3, y

軸方向に -1 だけ平行移動したものである。

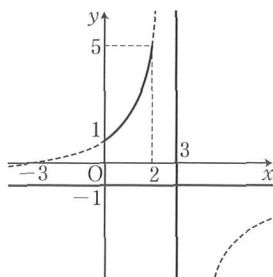
定義域は $0 \leq x \leq 2$ であり

$x=0$ のとき $y=1$

$x=2$ のとき $y=5$

グラフは図のようになる。

値域は $1 \leq y \leq 5$ 図



(2) 与式を変形すると $y = -\sqrt{2(x+3)}$

これは $y = -\sqrt{2x}$ のグラフを x 軸方向に

-3 だけ平行移動したものである。定義域

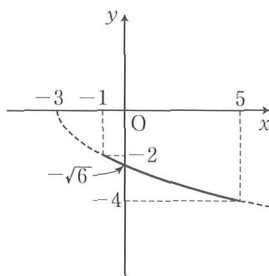
は $-1 \leq x \leq 5$ であり

$x=-1$ のとき $y=-2$

$x=5$ のとき $y=-4$

グラフは図のようになる。

値域は $-4 \leq y \leq -2$ 図



教 p.22

3. $k \neq 0$ とする。関数 $f(x) = kx + k^2$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について、

$f(1) = 6$, $f^{-1}(2) = -1$ であるとき、定数 k の値を求めよ。

指針 逆関数の性質 「 $b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$ 」を利用すると、逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めなくても解決する。

2つの条件を同時に満たす k の値を求める。

解答 $f(1) = 6$ より $k + k^2 = 6$ …… ①

$f^{-1}(2) = -1$ すなわち $2 = f(-1)$ より

$2 = -k + k^2$ …… ②

①を解くと、 $k^2 + k - 6 = 0$ より $k = 2, -3$

②を解くと、 $k^2 - k - 2 = 0$ より $k = 2, -1$

よって、①、②を同時に満たす k の値は $k = 2$

でこれは $k \neq 0$ も満たす。

したがって $k = 2$ 図

①, ② から k^2 を消去しても $k = 2$ となるね。



第1章 章末問題B

教 p.22

4. 次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sqrt{3x-5}=x-1$

(2) $\sqrt{3x-5}<x-1$

(3) $\sqrt{1-2x}=-x+1$

(4) $\sqrt{1-2x}\geq-x+1$

指針 無理式を含む方程式，不等式

(1), (3) 両辺を2乗して得られる2次方程式を解く。ただし，得られた x の値がもとの方程式を満たすかどうか調べる。(2), (4) 左辺，右辺それぞれの関数のグラフの共有点の x 座標とグラフの上下関係により不等式の解を求める。共有点の x 座標は，それぞれ(1), (3)で求めた方程式の解である。解答 (1) $\sqrt{3x-5}=x-1$ …… ①両辺を2乗すると $3x-5=(x-1)^2$ 整理すると $x^2-5x+6=0$ これを解くと $x=2, 3$

これらは①を満たすから

 $x=2, 3$ 答

(2) $y=\sqrt{3x-5}$ より $y=\sqrt{3\left(x-\frac{5}{3}\right)}$ …… ①

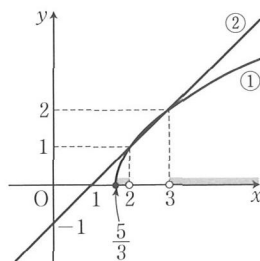
$y=x-1$ …… ②

不等式の解は，関数①のグラフが直線②より下側にある x の値の範囲である。

グラフの共有点の座標は，(1)の結果と②から

(2, 1), (3, 2)

よって，①と②のグラフは右の図のように

なるから，求める解は $\frac{5}{3}\leq x<2, 3<x$ 答

①の定義域外は不等式の解とならないよ。



(3) $\sqrt{1-2x}=-x+1$ …… ①

両辺を2乗すると $1-2x=(-x+1)^2$ 整理すると $x^2=0$ よって $x=0$ これは①を満たすから $x=0$ 答

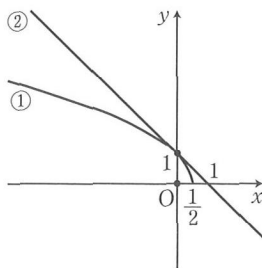
$$(4) y = \sqrt{1-2x} \text{ より } \sqrt{-2\left(x - \frac{1}{2}\right)} \dots\dots ①$$

$$y = -x + 1 \dots\dots ②$$

不等式の解は、関数①のグラフが直線②より上側(共有点を含む)にある x の値の範囲である。

グラフの共有点の座標は、(3)の結果と②から $(0, 1)$

よって、①と②のグラフは右の図のようになるから、求める解は $x=0$ 図



- 注意** (2) 関数 $y = \sqrt{3x-5}$ のグラフと直線 $y = x-1$ は、図のように、2点 $(2, 1)$ 、 $(3, 2)$ で交わっている。
- (4) 関数 $y = \sqrt{1-2x}$ のグラフと直線 $y = -x+1$ は、図のように、点 $(0, 1)$ で接している。

教 p.22

5. 関数 $f(x) = \frac{x+1}{x-a}$ について、 $f^{-1}(x) = f(x)$ が成り立つように、定数 a の値を定めよ。

指針 逆関数 $y = f(x)$ として、逆関数 $f^{-1}(x)$ を求める。 $f^{-1}(x) = f(x)$ より、恒等式の性質を使って a の値を定める。

解答 $a \neq -1$ のとき、 $f(x) = 1$ ($x \neq -1$) となるが、これは逆関数をもたない。

$$a \neq -1 \text{ として、} y = \frac{x+1}{x-a} \dots\dots ① \text{ とする。}$$

$$\frac{x+1}{x-a} = \frac{(x-a)+a+1}{x-a} = \frac{a+1}{x-a} + 1 \text{ であるから、関数①の値域は } y \neq 1$$

$$① \text{ より } y(x-a) = x+1$$

$$\text{よって } (y-1)x = ay+1$$

$$y \neq 1 \text{ であるから } x = \frac{ay+1}{y-1}$$

ゆえに、関数①の逆関数は

$$y = \frac{ax+1}{x-1} \text{ よって } f^{-1}(x) = \frac{ax+1}{x-1} \dots\dots ②$$

$$f^{-1}(x) = f(x) \text{ であるから } \frac{ax+1}{x-1} = \frac{x+1}{x-a}$$

$$\text{分母を払って } (ax+1)(x-a) = (x+1)(x-1)$$

$$\text{各辺を整理すると } ax^2 - (a^2-1)x - a = x^2 - 1$$

これは x についての恒等式であるから、係数を比較して

$$a=1, a^2-1=0, -a=-1 \text{ よって } a=1$$

これは $a \neq -1$ を満たすから $a=1$ 答

教 p.22

6. 2つの関数 $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $g(x)=\frac{x}{x-1}$ について、次の合成関数を求めよ。

(1) $f(g(x))$

(2) $g(g(x))$

指針 合成関数 $f(g(x))$ は、 $f(x)=\frac{1}{1-x}$ の x を $g(x)$ の式でおき換えて計算する。 $g(g(x))$ についても同様である。なお、 $x-1 \neq 0$ から求める合成関数の定義域は、ともに 1 以外の実数全体である。解答 (1) $g(x)=\frac{(x-1)+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+1$ より、 $g(x)$ の値域は 1 以外の実数全体で、 $f(x)$ の定義域と同じである。また、 $g(x)$ の定義域は 1 以外の実数全体である。

よって $f(g(x))=f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{1}{1-\frac{x}{x-1}}$

$$=\frac{x-1}{(x-1)-x}=1-x \quad (x \neq 1) \quad \text{答}$$

(2) $g(x)$ の値域、定義域はともに 1 以外の実数全体である。

よって $g(g(x))=g\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}$

$$=\frac{x}{x-(x-1)}=x \quad (x \neq 1) \quad \text{答}$$